第2讲 二次根式的化简与求值

**知识梳理**

**1．与二次根式有关的化简求值及其应用**

对于化简求值题，关键是要认真分析题目中的隐含条件，挖掘已知条件与结论之间的内在关系与联系，进行适当化简，在求值中要注意有关性质、公式、运算法则的灵活运用，在求值后还要注意检查.

**2．复合二次根式**

我们把二次根式中套叠着二次根式的式子叫做**复合二次根式**.如：、、等都是复合二次根式.

复合二次根式化简需灵活运用二次根式的性质和运算法则.基本法则有：配方法、待定系数法、公式法、平方法等.

**典型解析**

**一、二次根式的计算**

**例1：**计算. **例2：**计算：.

例1：规范解答

原式

解后反思

本例初看似乎很复杂，其实只要你掌握好了公式，问题就简单了，因为与成立，且分式也成立，故有*a*>0，*b*>0，≠0，而同时公式：(*a*-*b*)2=*a*2-2*ab*+*b*2，*a*2-*b*2=(*a*+*b*)(*a*-*b*)，可以帮助我们将*a*-2+*b*和*a*-*b*变形，所以我们应掌握好公式可以使一些问题从复杂到简单.

例2：规范解答

原式=.

解后反思

本题主要应该从已知式子入手发现特点，因为分母含有，所以其分子必有含的因式，于是可以发现，且，通过因式分解，分子所含的的因式就出来了.

**【变式训练】**

1.计算： 2.计算：

1.解：原式

=.

2.解：设

则

所以.

**二、与二次根式有关的化简求值及其应用**

**(1)化简二次根式时，注意挖掘隐含条件，并注意二次根式的双重非负性.**

**例3：**先化简，再求值：其中

解析：判断*a*-1的正负性是解题的关键，注意先化简再将*a*的值代入可求得结果.

答案：因为所以*a*-1<0.

原式=

将代入

[规律总结]二次根式的化简求值是对二次根式的性质、有关代数式的运算和乘法公式等内容的综合运用.

**(2)整体思想在二次根式中的应用**

整体思想是一种重要的数学思想，它把研究的对象的一部分(或全部)视为一个整体.在解题时，则把注意力和着眼点放在问题整体结构上，从而触及问题的本质，避开不必要的计算，使问题得以简化.

**例4：**已知求*x*3*y*+*xy*3的值.

解析：如果直接将*x*，*y*的值代入计算，显然比较麻烦，但注意到*x*3*y*+*xy*3可以化为*xy*[(*x*+*y*)2-2*xy*]，而*x*+*y*和*xy*的值是一个常数，故将*x*+*y*和*xy*作为一个整体代入求值，可简化计算.

解：

的值为10.

**【变式训练】**

已知的值.

答案：

**例5：**已知求的值.

**解：**

【*x*-3=】

把*x*=3+2√2代入式中再计算，是解决这类问题的基本方法，而把(*x*-3)看作整体，用2√2代入式中再计算，比较简便.

**【变式训练】**

已知，试求的值.

答案：原式∴原式

**例6：**设求*x*5+2*x*4-17*x*3-*x*2+18*x*-17的值.

解：因为

所以

所以

所以*x*2+2*x*-16=0.

原式=*x*5+2*x*4-16*x*3-*x*3-2*x*2+16*x*+*x*2+2*x*-16-1

=(*x*5+2*x*4-16*x*3)-(*x*3+2*x*2-16*x*)+(*x*2+2*x*-16)-1

=*x*3(*x*2+2*x*-16)-*x*(*x*2+2*x*-16)+(*x*2+2*x*-16)-1

=-1

**(3)二次根式的大小比较**

**例7：**先阅读理解，再回答问题.

的整数部分是1；

的整数部分是2；

的整数部分是3；

…

依此类推，我们会发现(*n*为正整数)的整数部分是多少？说出你的理由.

解析：先从题目给出的几个特殊情形，分析出其一般结论，再运用二次根式的性质和完全平方公式进行论证.

解：通过上面几个式子反映的规律，我们可以推测(*n*为正整数)的整数部分为*n*.理由如下：

∵*n*2+*n*=*n*(*n*+1)，

而*n*2<*n*(*n*+1)<(*n*+1)2，

的整数部分为*n*.

[点评]确定一个二次根式的整数部分，关键是用逼近的方法将其取值范围限定在两个相邻的整数之间，此题中的可作为普遍规律，应在理解的前提下掌握.

**(4)借助有理化因式解题**

**例8：**计算的值.

规范解答

原式=

解后反思

处理这样的问题，切不可盲目计算，而是应该观察题目的特点，将每个式子进行分母有理化，从而找到解题规律，进行简便运算.

**【变式训练】**

化简：

解：原式=

**例9：**已知：求

规范解答

因为=(*x*+6)-(*x*+1)=5，

所以=5÷=5.

解后反思

由于与互为有理化因式，其乘积可化去根号.故可尝试一下其乘积的结果.互为有理化因式是根式运算中去掉根号的重要工具，广泛应用于分母分子有理化中.同时还要注意，通过互为有理化因式对根式进行有理化也是根式计算与化简的重要手段.

**例10：**比较与的大小.

解：因为，

又因为

所以

进一步推出，若*a*够大，则有

**【变式训练】**

(1)观察下列各式：

并根据以上规律猜想与的大小关系；

(2)根据以上规律写出用*n*(*n*是正整数)表示的不等式，并验证你的结论；

(3)运用上面的结论计算下列算式

.

答案：(1)，验证略；(3)9+-

**三、复合二次根式**

**例11：**化简：； （2）.

=

=

=.

**例12：**计算：.

观察到(2+)+(2-)=4，(2+)(2-)=4-3=1，(3+2)+(3-2)=6，(3+2)(3-2)=9-8=1.我们可以平方的方法来解决问题.

因为

所以同理可得

则

一般而言，我们可设其中*x*+*y*=*a*，*xy*=*b*.

**例13：**求满足的有序有理数对(*x*，*y*).

**解：**

则

又*x*，*y*为有理数，√3为无理数，则

所以，满足的有序有理数对(*x*，*y*)为

**同步训练**

**一、填空题**

1．若，则*x*2+8*x*+10=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：

2．若*x*2-*x*-2=0，则的值等于\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

[解析]若直接求出*x*的值，显然目前无法解决，需采用整体代换思想，将*x*2-*x*=2整体代换到式子当中，再化简计算.

由*x*2-*x*-2=0可得*x*2-*x*=2.

[答案]

[点评]在解决二次根式的求值问题时，一般需先将二次根式化简，再将已知值代入，注意整体代换思想的运用.

**二、选择题**

3．当*a*=2时，代数式的值是( ).

A.

答案：D

4．若则*xy*的值是( ).

A.

答案：D [提示]

**三、解答题**

5．已知的值.

[解]原式

.

∴原式=*a*-1-

[点评]由已知条件确定*a*与1的大小，是本题化简的关键，在分式化简时，要正确运用因式分解的方法.

6．已知(1)求的值；(2)求*x*2+*y*2的值.

[解析]此题若先将*x*，*y*分母有理化，然后代入求值，运算量比较大，计算繁琐且易出错，观察待求的两个代数式是关于*x*，*y*的对称式，因此可以转化为关于*x*+*y*和*xy*的表达式，这样运算比较简便.

[解]

[点评]本题在化简*x*和*y*后，并不是直接代入求值，而是求出*x*+*y*和*xy*的值，然后整体代换求解，这样能简化计算.因此在解题之前应认真观察题目特点，寻找最简便的方法.

7．求和

答案：

8．化简下列复合二次根式：

（1）； （2）.

**答案：**(1)+1

9．已知求的值.

为了减少代入求值的计算量，我们不妨将已知条件变形，得到一个新的关系式后，再进行代入求值.

**解：**由得

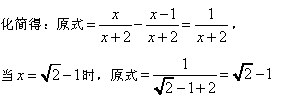
再两边平方得

10.若的整数部分为*x*，小数部分为*y*，求的值.

**答案：**6

**走进中考**

1．（2015·上海中考）先化简，再求值：，其中．

【解析】

**三角形复习**

1．已知：*BC*=*DE*，∠*B*=∠*E*，∠*C*=∠*D*，*F*是*CD*中点，求证：∠1=∠2.

*A*

*B*

*C*

*D*

*E*

*F*

2

1

证明：连接*BF*和*EF*

∵ *BC*=*ED*，*CF*=*DF*，∠*BCF*=∠*EDF*

∴ 三角形*BCF*全等于三角形*EDF*(边角边)

∴ *BF*=*EF*，∠*CBF*=∠*DEF*

连接*BE*

在三角形*BEF*中，*BF*=*EF*

∴ ∠*EBF*=∠*BEF*.

∵ ∠*ABC*=∠*AED*.

∴ ∠*ABE*=∠*AEB*.

∴ *AB*=*AE*.

在三角形*ABF*和三角形*AEF*中

*AB*=*AE*，*BF*=*EF*，

∠*ABF*=∠*ABE*+∠*EBF*=∠*AEB*+∠*BEF*=∠*AEF*

∴ 三角形*ABF*和三角形*AEF*全等.

∴ ∠*BAF*=∠*EAF* (∠1=∠2).

2．已知：∠1=∠2，*CD*=*DE*，*EF*∥*AB*，求证：*EF*=*AC*.

*B*

*A*

*C*

*D*

*F*

2

1

*E*

过*C*作*CG*∥*EF*交*AD*的延长线于点*G*

*CG*∥*EF*，可得，∠*EFD*＝*CGD*

*DE*＝*DC*

∠*FDE*＝∠*GDC*（对顶角）

∴△*EFD*≌△*CGD*

*EF*＝*CG*

∠*CGD*＝∠*EFD*

又，*EF*∥*AB*

∴，∠*EFD*＝∠1

∠1=∠2

∴∠*CGD*＝∠2

∴△*AGC*为等腰三角形，

*AC*＝*CG*

又 *EF*＝*CG*

∴*EF*＝*AC*